Matrizes de mudança de base

Álgebra Linear – Videoaula 16

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Como passar de uma base a outra?

Suponha que tenhamos bases ordenadas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ de um espaço vetorial V. Se $v \in V$, então como "transformar" $[v]^{\mathcal{A}}$ em $[v]^{\mathcal{B}}$.

Lembre-se de que se $T\colon V \to V$, então

$$[Tv]^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} [v]^{\mathcal{A}}$$

Em particular, para $T = \mathrm{id}_V$, temos

$$[v]^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} [v]^{\mathcal{A}}$$

Matrizes de mudança de base

Definição

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ bases ordenadas de V.
A **matriz de mudança da base $\mathcal{A}$ para a base $\mathcal{B}$** é a matriz

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Convenção

Vamos omitir o índice "V" na notação da identidade quando não causar confusão, e.g.

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Propriedades de matriz de mudança de base

Teorema

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases ordenadas de um espaço vetorial V de dimensão n. Então:

1. $[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I_n$ *(a matriz identidade $n \times n$).*
2. $[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ são bases ordenadas de W, então

3. $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Y}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \, [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} \, [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$

Propriedades básicas da mudança de base

1. $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I_n$

Se $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, então

$$[a_i]^{\mathcal{A}} = e_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(o i-ésimo vetor da base canônica).

Propriedades básicas da mudança de base

1. $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = I_n$

$$
\begin{aligned}
\big[\mathrm{id}\big]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \big[\mathrm{id}(a_1)\big]^{\mathcal{A}} & \big[\mathrm{id}(a_2)\big]^{\mathcal{A}} & \cdots & \big[\mathrm{id}(a_n)\big]^{\mathcal{A}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \big[a_1\big]^{\mathcal{A}} & \big[a_2\big]^{\mathcal{A}} & \cdots & \big[a_n\big]^{\mathcal{A}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Propriedades básicas da mudança de base

2. $[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$

$$\begin{aligned} [\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} [\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \\ &= I_n, \end{aligned}$$

portanto $[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$.

Propriedades básicas da mudança de base

3. $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Y}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} &= [\mathrm{id}_W \, T \, \mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Y}} \\ &= [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Y}} \end{aligned}$$

Como calcular mudança de base em $\mathbb{R}^n$?

Seja $\mathcal{E}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n,$$

ou seja,

$$[v]^{\mathcal{E}_n} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Como calcular mudança de base em $\mathbb{R}^n$?

Sejam

- $\mathcal{E}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$.

Então

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}_n} &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathrm{id}(u_1)]^{\mathcal{E}_n} & [\mathrm{id}(u_2)]^{\mathcal{E}_n} & \cdots & [\mathrm{id}(u_n)]^{\mathcal{E}_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [u_1]^{\mathcal{E}_n} & [u_2]^{\mathcal{E}_n} & \cdots & [u_n]^{\mathcal{E}_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

a matriz que tem os vetores de $\mathcal{U}$ como colunas.

Como calcular mudança de base em $\mathbb{R}^n$?

Sejam

- $\mathcal{E}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ outra base ordenada de $\mathbb{R}^n$.

Então

- $[\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}_n}$ é a matriz que tem os vetores de $\mathcal{U}$ como colunas.
- $[\mathrm{id}]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_n}$ é a matriz que tem os vetores de $\mathcal{V}$ como colunas.
- $[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{V}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_n}\right)^{-1}$ pode ser calculada por escalonamento;
- $[\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{V}} [\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}_n}$ pode ser calculada sem muitos problemas.

Exemplo

Considere:

- a base ordenada de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} = ((-3, 3), (2, 2))$$

- a base ordenada de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = ((-1, 1, 2), (0, -2, -3), (-2, 2, -2))$$

- a transformação linear $S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$S(x, y, z) = (y, x + 3y + z)$$

Vamos calcular $[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

Exemplo

$$\mathcal{A} = ((-3,3),(2,2))$$
$$\mathcal{B} = ((-1,1,2),(0,-2,-3),(-2,2,-2))$$
$$S(x,y,z) = (y, x+3y+z)$$

Temos

$$
\begin{aligned}
[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}\,[S]\,[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} \\
&= \left([\mathrm{id}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}_2}\right)^{-1}\,[S]\,[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & -14 & 0 \\ 15 & -33 & 12 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrizes inversíveis são mudanças de base

Teorema

Uma matriz U é inversível se, e somente se, é uma matriz de mudança de base.

Já sabemos que toda matriz de mudança de base é inversível.
Reciprocamente, se U é inversível, sejam $u_1, \ldots, u_n$ as suas colunas:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Então $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ e $U = [\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}_n}$.

Matrizes inversíveis são mudanças de base

Observação: Mais geralmente, se U é inversível, então para todo espaço vetorial V e para toda base $\mathcal{B}$ de V, existe uma base $\mathcal{X}$ de V tal que $U = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{X}}$.